# Anhang zur Abhandlung über unendlich viele Kurven derselben Art*

Leonhard Euler

§1 In der obigen Abhandlung, in welcher ich eine Methode angegeben habe, eine Gleichung für unendlich viele Kurven derselben Gattung zu finden, habe ich gelehrt, den Wert von $Q$ in der Gleichung

$$dz = Pdx + Qda$$

aus der gegebenen Gleichung $z = \int Pdx$ zu bestimmen. Denn wenn $P$ aus $x$ und $a$ zusammen mit Konstanten wie auch immer zusammengesetzt war, ist es offenkundig, wenn $\int Pdx$ nicht nur nach $x$ sondern auch nach $a$ differenziert wird, dass eine Gleichung von dieser Form $dz = Pdx + Qda$ hervorgehen wird, in welcher der Wert von $Q$ notwendig von der Größe $P$, welche bekannt ist, abhängen wird. Ich habe nämlich bewiesen, wenn das Differential von $P$ für konstant gehaltenes $x$ $Bda$ war, dass das Differential von $Q$ für konstant gehaltenes $a$ $Bdx$ sein wird, woher die Abhängigkeit von $Q$ von $P$ zur Genüge erkannt wird.

§2 Nachdem aber der Wert von $Q$ gefunden worden war, wird die Gleichung

$$dz = Pdx + Qda$$

*Originaltitel: "Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis eiusdem generis", zuerst publiziert in: *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 7* (1740, geschrieben 1734): pp. 184 – 200, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 22, pp. 57 – 75, Eneström Nummer E45, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

die Natur der reihenweise gegebenen unendlich vielen Kurven, von welchen die einzelnen jeweils in der Gleichung $dz = Pdx$ enthalten sind, sich aber voneinander wegen der Veränderlichkeit des Parameters oder Moduls $a$ unterscheiden. Und dieser Sache wegen habe ich die Gleichung $dz = Pdx + Qda$, in welcher der Modulus $a$ als variable Größe enthalten ist, mit dem hoch geehrten Herrn HERMANN modulare Gleichung genannt.

**§3** Wenn $Pdx$ eine Integration zulässt, oder wenn die reihenweise gegebenen Kurven alle algebraisch sind, wird die Gleichung $z = \int Pdx$ zugleich eine modulare Gleichung sein; denn weil keine Differentiale gegeben sind, wird der Modulus $a$ genauso wie $x$ und $z$ als Variable betrachtet werden können. Wenn aber $Pdx$ nicht integriert werden kann, wird auch die modulare Gleichung nicht algebraisch sein, ausgenommen in den Fällen, in welchen

$$P = AX + BY + CZ + \text{etc.}$$

ist, während $A$, $B$, $C$ etc. Funktionen von $a$ und Konstanten sind, und $X$, $Y$, $Z$ etc. Funktionen von $x$ und Konstanten, der Modulus $a$ aber in selbige nicht eingeht. Auch wenn nämlich die Gleichung $dz = Pdx$ eine Differentialgleichung ist, ist dennoch die modulare Gleichung

$$z = A\int Xdx + B\int Ydx + C\int Zdx + \text{etc.}$$

als algebraisch anzusehen.

**§4** Wenn aber $P$ keinen solchen Wert hatte, wird die modulare Gleichung entweder eine Differentialgleichung ersten Grades oder höheren Grades sein. Eine Differentialgleichung von erstem Grad wird sie freilich sein, wenn $Q$ entweder eine algebraische Größe ist oder das Integral von $Pdx$ beinhaltet, denn in diesem Fall wird $z$ anstelle von $\int Pdx$ eingesetzt auch das Integralzeichen beseitigen, sodass die modulare Gleichung als reine Differentialgleichung hervorgehen wird.

**§5** Ich habe aber in der vorherigen Dissertation entdeckt, dass $Q$ sooft einen algebraischen Wert hat, wie $P$ eine solche Funktion von $a$ und $x$ war, dass die Anzahl von der Dimension, welche $a$ und $x$ ergeben, überall dieselbe und zwar $-1$ ist, oder sooft $Px$ oder $Pa$ eine Funktion von $a$ und $x$ von keiner Dimension war. Weiter habe ich auch beobachtet [§ 24], sooft in $P$ die Buchstaben $a$ und $x$

überall dieselbe Anzahl an Dimensionen definieren, dass ebenso oft $Q$ von der Integration von $Pdx$ abhängt. Weil daraus so außergewöhnliche Hilfsmittel folgen, um modulare Gleichung zu finden, wird es überaus förderlich sein zu untersuchen, ob vielleicht andere Funktionen $P$ von dieser Art gegeben sind, welche sich derselben Eigenschaften erfreuen. Ich habe also beschlossen diese a priori ausfindig zu machen, damit zugleich eine Methode offen gelegt wird, solche Funktionen zu finden.

**§6** Wenn $P$ eine Funktion von $a$ und $x$ von $-1$ Dimensionen ist, oder $z$ eine Funktion von $a$ und $x$ keiner Dimension ist, habe ich gezeigt, dass

$$Px + Qa = 0 \quad \text{oder} \quad Q = -\frac{Px}{a}$$

sein wird. Wir wollen also annehmen, dass $Q = -\frac{Px}{a}$ ist und wollen untersuchen, was für eine Funktion $P$ von $a$ und $x$ ist. Aber wenn $Q = -\frac{Px}{a}$ ist, wird

$$dz = Pdx - \frac{Pxda}{a}$$

sein. Deswegen wird $P$ eine solche Funktion von $a$ und $x$ sein müssen, dass $dx - \frac{xda}{a}$ mit ihr multipliziert integrierbar wird. Hier verstehe ich sie aber nicht als nur integrierbar, sofern die Integration auf eine algebraische Größe, sondern auch wenn sie auf irgendeine Quadratur zurückgeführt wird. Wenn wir also allgemein eine Größe gefunden haben, mit welcher $dx - \frac{xda}{a}$ multipliziert integrierbar wird, wird sie der gesuchte Wert von $P$ sein, mit der Eigenschaft, dass $Q = -\frac{Px}{a}$ ist.

**§7** Aber $dx - \frac{xda}{a}$ wird integrierbar, wenn sie mit $\frac{1}{a}$ multipliziert wird, denn das Integral wird $\frac{x}{a} + c$ sein, während $c$ irgendeine von $a$ nicht abhängige Größe bedeutet. Deshalb, wenn $f\left(\frac{x}{a} + c\right)$ irgendeine Funktion von $\frac{x}{a} + c$ bezeichnet, wird auch $dx - \frac{xda}{a}$ integrierbar sein, wenn sie mit $\frac{1}{a}f\left(\frac{x}{a} + c\right)$ multipliziert wird. Weil dieser Wert höchst allgemein ist, wird

$$P = \frac{1}{a}f\left(\frac{x}{a} + c\right) \quad \text{und} \quad Q = -\frac{Px}{a}$$

sein. Aber $f\left(\frac{x}{a} + c\right)$ ist irgendeine Funktion von $a$ und $x$ von keiner Dimension. Deswegen wird, sooft $Pa$ eine Funktion von keiner Dimension von $a$ und $x$ war, ebenso oft $Q = -\frac{Px}{a}$ sein, und daher die modulare Gleichung

$$dz = Pdx - \frac{Pxda}{a}.$$

**§8** Es sei $Q = A - \frac{Px}{a}$ und $A$ irgendeine Funktion von $a$ und Konstanten; es wird

$$dz = Pdx + Ada - \frac{Pxda}{a}$$

oder

$$dz - Ada = Pdx - \frac{Pxda}{a}$$

sein. Weil in dieser Gleichung $dz - Ada$ integrierbar ist, wird $Pdx - \frac{Pxda}{a}$ auch integrierbar sein. Dies passiert aber auch mit der vorherigen Operation, wenn $P = \frac{1}{a}f\left(\frac{x}{a} + c\right)$ ist. Dann wird also

$$Q = A - \frac{x}{a^2}f\left(\frac{x}{a} + c\right)$$

sein. In gleicher Weise sieht man ein, wenn

$$P = X + \frac{1}{a}f\left(\frac{x}{a} + c\right)$$

war, während $X$ eine Funktion nur von $x$ bezeichnet, dass

$$Q = A - \frac{x}{a^2}f\left(\frac{x}{a} + c\right)$$

sein wird, wo wie zuvor $f\left(\frac{x}{a} + c\right)$ irgendeine Funktion von $a$ und $x$ von keiner Dimension ist.

**§9** Es sei $Q = -\frac{nPx}{a}$, wo $n$ irgendeine beliebige Zahl anzeige; es wird

$$dz = Pdx - \frac{nPxda}{a}$$

sein. Also wird $P$ eine solche Größe sein müssen, welche $dx - \frac{nxda}{a}$, wenn sie damit multipliziert wird, integrierbar macht. Aber $dx - \frac{nxda}{a}$ wird integrierbar, wenn es mit $\frac{1}{a^n}$ multipliziert wird, denn das Integral wird $\frac{x}{a^n}$ sein. Daher wird allgemein

$$P = \frac{1}{a^n} f\left(\frac{x}{a^n} + c\right)$$

sein. Und sooft $P$ einen solchen Wert hatte, wird

$$Q = -\frac{nx}{a^{n+1}} f\left(\frac{x}{a^n} + c\right)$$

sein. Man sieht auch ein, wenn

$$P = X + \frac{1}{a^n} f\left(\frac{x}{a^n} + c\right)$$

war, dass auch allgemeiner

$$Q = A - \frac{nx}{a^{n+1}} f\left(\frac{x}{a^n} + c\right)$$

sein wird. Hier bezeichnet wie zuvor auch im Folgenden $f$ immer irgendeine Funktion der folgenden Größe. Aber $A$ irgendeine Funktion von $a$, und $X$ irgendeine Funktion nur von $x$.

**§10** Damit also entschieden werden kann, ob ein gewisser Wert von $P$ in der gefundenen Formel enthalten ist, muss man $a = b^{\frac{1}{n}}$ setzen, wonach zu sehen ist, ob $Pb$ eine Funktion von $b$ und $x$ von keiner Dimension ist oder ob das Aggregat aus einer Funktion nur von $x$ und einer solchen Funktion hervorgeht. Wenn dies entdeckt wird, wird $P$ die gewünschte Eigenschaft haben und $Q$ wird dieser Funktion mit $-\frac{nx}{a}$ multipliziert zusammen mit irgendeiner Funktion von $A$ sein. Es ist immer zu bemerken, dass die Größe $P$ um eine Funktion von $x$ wie etwa $X$, und $Q$ um eine Funktion von $a$ wie etwa $A$ vermehrt werden kann. Denn wenn

$$dz = Pdx + Qda$$

eine modulare Gleichung war, wird auch die Gleichung

$$dz = Pdx + Xdx + Qda + Ada$$

eine solche sein. Denn nachdem $du$ anstelle von $dz - Xdx - Ada$ gesetzt worden ist, wird man $du = Pdx + Qda$ haben, welche mit der ersten vollkommen übereinstimmt. Dieser Sache wegen wäre es im Folgenden überflüssig, zum angenommenen Wert von $Q$ irgendeine Funktion $A$ von $a$ zu addieren. Daher werden wir diese offensichtliche Verallgemeinerung vernachlässigen.

**§11** Es sei nun $Q = PE$, während $E$ irgendeine Funktion von $a$ bezeichnet. Es wird deshalb

$$dz = Pdx + PEda$$

sein und $P$ eine solche Größe, welche $dx + Eda$ integrierbar macht. Aber wenn $P = 1$ ist, wird dieses Differential integrierbar, denn das Integral wird $x + \int Eda$ wird sein. Daher wird

$$P = f\left(x + \int Eda\right) \quad \text{und} \quad Q = Ef\left(x + \int Eda\right)$$

sein. Oder wenn $\int Eda = A$ gesetzt wird und $P = f(x + A)$ war, wird

$$Q = \frac{dA}{da} f(x + A)$$

sein. Ob aber ein gegebener Wert von $P$ in dieser Formel enthalten ist, ist auf diese Weise ausfindig zu machen: Man setze $x = y - A$ und man untersuche, ob für $A$ eine solche Funktion von $a$ und Konstanten angenommen werden kann, dass $P$ eine Funktion allein von $y$ und Konstanten wird, in welche der Modulus $a$ nicht weiter eingeht.

**§12** Wir wollen festlegen, dass $Q = PY$ ist, wo $Y$ irgendeine Funktion von $x$ ist, welche aber den Modulus $a$ nicht involviert. Nach Festlegen dessen wird

$$dz = Pdx + PYda$$

und $P$ eine solche Funktion, welche $dx + Yda$ integrierbar mache. Aber für $P = \frac{1}{Y}$ gesetzt wird

$$z = \int \frac{dx}{Y} + a = X + a,$$

wenn man $\int \frac{dx}{Y} = X$ setzt. Deswegen wird

$$P = \frac{1}{Y} f(X + a)$$

sein. Sooft also $P$ einen Wert von dieser Art hatte, wird immer $Q = f(X + a)$ sein.

**§13** Es sei nun allgemeiner $Q = PEY$ gesetzt, es wird

$$dz = Pdx + PEYda$$

sein, wo wie zuvor $E$ eine Funktion von $a$, $Y$ aber eine hingegen von $x$ bezeichnet. Es ist ersichtlich, wenn $P = \frac{1}{Y}$ war, dass diese Formel das Differential integrierbar machen, es ginge nämlich

$$z = \int \frac{dx}{Y} + \int Eda \quad \text{oder} \quad z = X + A$$

mit $\int \frac{dx}{Y} = X$ hervor. Deswegen wird

$$P = \frac{1}{Y} f(X + A) = \frac{dX}{dx} f(X + A)$$

sein und in diesen Fällen wird

$$Q = \frac{dA}{da} f(X + A)$$

werden. In diesen Formeln werden auch logarithmische Werte von $A$ und $X$ erfasst, wie wenn

$$X = \ln T \quad \text{und} \quad A = -\ln F$$

ist, so wird

$$P = \frac{dT}{Tdx} f \frac{T}{F} \quad \text{und} \quad Q = \frac{-dF}{Fda} f \frac{T}{F}$$

sein.

**§14** Es wird also erkannt, dass all diese Formeln Geltung haben, wenn die vorgelegte Gleichung entweder

$$dz = dXf(X + A) \quad \text{oder} \quad dz = \frac{dX}{X} f \frac{X}{A}$$

war. Sooft also die vorgelegte Gleichung auf diese Formeln zurückgeführt werden kann, indem $X$ für irgendeine Funktion von $x$ und $A$ für irgendeine Funktion von $a$ eingesetzt wird, sooft wird eine modulare Gleichung dargeboten werden können: Es wird nämlich im ersten Fall

$$dz = dXf(X + A) + dAf(X + A)$$

sein, im zweiten Fall hingegen

$$dz = \frac{dX}{X} f \frac{X}{A} - \frac{dA}{A} f \frac{X}{A}.$$

Dies wird freilich in diesen allgemeinen Beispielen leicht erkannt, in spezielleren Fällen um vieles schwieriger. Deshalb wird der größte Nutzen in der Reduktion von speziellen Fällen auf allgemeine Formen liegen, was, wenn eine solche Reduktion möglich war, freilich ohne Mühe geleistet wird.

**§15** Wenn $Q = PR$ gesetzt wird, während $R$ irgendeine Funktion von $a$ und $x$ bezeichnet, wird

$$dz = Pdx + PRda$$

sein. Um nun den Wert von $P$ zu finden, nehme man die Formel $dx + Rda$ oder betrachte die Gleichung $dx + Rda = 0$ und untersuche, wie die Unbestimmten $a$ und $x$ voneinander getrennt werden können, oder was dasselbe ist, mit welcher Größe $dx + Rda$ multipliziert werden muss, dass sie integrierbar wird. Diese Größe sei $S$ und das Integral von $Sdx + RSda$ sei $T$, es wird $P = SfT$ sein. Und in diesen Fällen wird $Q = RSfT$ sein. Diese Operation erstreckt sich sehr weit und umfasst alle Fälle, in welchen $Q$ einen bekannten und von $z$ nicht abhängenden Wert hat.

**§16** Wir wollen aber weiter voranschreiten und nach den Werte von $P$ suchen, in welchen $Q$ nicht nur von $P$ sondern auch von $\int Pdx$ oder $z$ abhängt. Man setze also zuerst

$$Q = \frac{nz}{a} - \frac{Px}{a},$$

während $n$ irgendeine Zahl bezeichnet. Es wird also

$$dz = Pdx + \frac{nzda}{a} - \frac{Pxda}{a}$$

sein, oder

$$dz - \frac{nzda}{a} = Pdx - \frac{Pxda}{a}.$$

Man multipliziere auf beiden Seiten mit $\frac{1}{a^n}$, damit diese Gleichung hervorgeht

$$\frac{dz}{a^n} - \frac{nzda}{a^{n+1}} = \frac{Pdx}{a^n} - \frac{Pxda}{a^{n+1}},$$

in welcher die erste Seite integrierbar ist. Also wird auch die andere Seite

$$\frac{Pdx}{a^n} - \frac{Pxda}{a^{n+1}}$$

integrierbar sein müssen, woraus ein geeigneter Wert von $P$ zu suchen ist. Dies passiert, wenn $P = a^{n-1}$ ist, denn das Integral wird $\frac{x}{a} + c$ sein. Daher wird allgemein

$$P = a^{n-1} f\left(\frac{x}{a} + c\right)$$

sein, was sich zuträgt, wenn $\frac{P}{a^{n-1}}$ eine Funktion von $a$ und $x$ von keiner Dimension oder $P$ eine Funktion von $a$ und $x$ von $n-1$ Dimensionen ist. In diesem Fall ist also

$$nz = Px + Qa,$$

wie wir in der oberen Abhandlung gezeigt haben [S. 46].

**§17** Es sei $Q = \frac{nz}{a} + PEY$, wo $E$ aus $a$ und $Y$ aus $x$ in beliebiger Weise zusammengesetzt ist. Deshalb wird

$$dz - \frac{nzda}{a} = Pdx + PEY$$

und

$$\frac{dz}{a^n} - \frac{nzda}{a^{n+1}} = \frac{Pdx}{a^n} + \frac{PEYda}{a^n}$$

sein. Deswegen muss $P$ so angenommen werden, dass

$$\frac{dx + EYda}{a^n}$$

damit multipliziert integrierbar wird. Dies geschieht aber, wenn $P = \frac{a^n}{Y}$ ist, in welchem Fall das Integral $\int \frac{dx}{Y} + \int Eda$ oder $X + A$ für $\int \frac{dx}{Y} = X$ und $\int Eda = A$ ist. Daher wird

$$P = \frac{a^n dX}{dx} f(X + A)$$

sein müssen, und in diesen Fällen wird

$$Q = \frac{a^n dA}{da} f(X+A) + \frac{nz}{a}$$

sein. Wenn $X$ und $A$ von Logarithmen abhängen, wird $P$ als Wert dieser Art

$$\frac{a^n dX}{X dx} f \frac{X}{A}$$

hervorgehen, welchem

$$Q = \frac{nz}{a} - \frac{a^n dA}{A da} f \frac{X}{A}$$

entsprechen wird.

**§18** Wenn $Q = Fz + PEY$ gesetzt wird, und $F$ und $E$ Funktionen von $a$ sind, $Y$ hingegen eine von $x$, dann wird

$$dz - Fzda = Pdx + PEYda$$

sein. Man setze $\int Fda = \ln B$, so dass $B$ eine Funktion von $a$ ist, und man teile durch $B$, man wird

$$\frac{dz}{B} - \frac{zdB}{B^2} = \frac{Pdx}{B} + \frac{PEYda}{B}$$

haben. Weil also die linke Seite integrierbar ist, muss auch die andere eben dazu gemacht werden. Dies geschieht, wenn $P = \frac{B}{Y}$ ist, und das wird das Integral

$$\int \frac{dx}{Y} + \int Eda \quad \text{oder} \quad X + A$$

sein. Deshalb wird der gesuchte Werte von $P$

$$\frac{BdX}{dx} f(X+A)$$

sein, $Q$ wird hingegen

$$\frac{zdB}{Bda} + \frac{BdA}{da} f(X+A)$$

sein. Man erkennt auch, wenn

$$P = \frac{BdX}{Xdx} f \frac{X}{A}, \quad \text{war, dass} \quad Q = \frac{zdB}{Bda} - \frac{BdA}{Ada} f \frac{X}{A}$$

sein wird.

**§19** Die Lösung wird sich sehr weit erstrecken, wenn

$$Q = Fz + PR$$

gesetzt wird und $R$ eine Funktion von $a$ und $x$ war.Es wird nämlich

$$dz - Fzda = Pdx + PRda$$

sein. Denn nach Setzen von $\int Fda = \ln B$ teile man durch $B$, man wird

$$\frac{dz}{B} - \frac{zdB}{B^2} = \frac{P}{B}(dx + Rda)$$

haben. Nun sei $S$ eine $dx + Rda$ integrierbar machende Funktion und es sei

$$\int (Sdx + SRda) = T.$$

Nach Finden von diesem wird $P = BSfT$ sein, diesem entspricht $Q = \frac{zdB}{Bda} + BRSfT$.

**§20** Es können außerdem mehrere Werte dieser Art von $P$ verbunden werden und auf diese Weise weiter verallgemeinert werden, wie, wenn man

$$P = \frac{BdX}{dx} f(X + A) + \frac{BdY}{dx} f(Y + E)$$

gesetzt wird,

$$Q = \frac{zdB}{Bda} + \frac{BdA}{da} f(X + A) + \frac{BdE}{da} f(Y + E)$$

sein wird. Und in gleicher Weise wird die Anzahl von Termen beliebig vergrößert werden können. In all diesen Fällen findet man eine modulare Gleichung als Differentialgleichung ersten Grades gefunden. Deswegen gehe ich nach Erledigung dieser zur Untersuchung der Fälle über, in welchen die modulare Gleichung nicht als eine Differentialgleichung ersten Grades gegeben ist, welche aber dennoch auf eine modulare Gleichung als Differenzen-Differentialgleichung geführt werden.

**§21** Wenn also $Q$ weder algebraisch durch $a$ und $x$ und auch nicht durch $z$ ausgedrückt werden kann, sind die Fälle ausfindig zu machen, in welchen das Differential von $Q$ dargeboten werden kann. Es ist aber

$$Q = \frac{dz - Pdx}{da},$$

also

$$dQ = d \cdot \frac{dz - Pdx}{da}.$$

Wenn also das Differential von $Q$ entweder allein durch $a$ und $x$ oder durch diese und $Q$ oder sogar zugleich durch $z$ ausgedrückt werden kann, wird man eine modulare Gleichung haben, welche eine Differentialgleichung zweiten Grades sein wird. Es ist aber in der obigen Abhandlung [S. 39] gezeigt worden, wenn

$$dP = Ldx + Mda$$

setzt, dass

$$dQ = Mdx + Nda$$

sein wird, sodass diese Differentiale den gemeinsamen Buchstaben $M$ beinhalten. Weil aber aus gegebenen $P$ auch $M$ gegeben ist, wird nichts anderes verlangt, als dass $N$ bestimmt wird. Deswegen wollen wir nach den Fällen suchen, in welchen $N$ entweder algebraisch oder durch $Q$ oder durch $Q$ und $z$ ausgedrückt werden kann. Denn dann wird man die modulare Gleichung

$$Mdx + Nda = d \cdot \frac{dz - Pdx}{da}$$

haben, nachdem man in $N$ anstelle von $Q$ seinen Wert $\frac{dz-Pdx}{da}$ gesetzt worden ist.

**§22** Aus dem Vorhergehenden wird zur Genüge eingesehen, wenn $N$ allein durch $a$ und $x$ bestimmt wird, dass

$$M = \frac{dX}{dx} f(X + A) \quad \text{und} \quad N = \frac{dA}{da} f(X + A)$$

oder

$$M = V + \frac{dX}{dx} f(X + A) \quad \text{und} \quad N = I + \frac{dA}{da} f(X + A)$$

sein wird, während $V$ irgendeine Funktion von $x$ und $I$ eine von $a$ bezeichnet. Aus gegebenen $P$ suche man also $M$, indem man $P$ für konstant gehaltenes $x$ differenziert, und das gefundene Differential durch $da$ teilt. Danach untersuche man, ob der Wert von $M$ in der Formel

$$V + \frac{dX}{dx} f(X + A)$$

enthalten ist. Wenn dies geschieht und $X$ und $A$ und $V$ bestimmt worden sind, wird

$$Vdx + dXf(X + A) + Ida + dAf(X + A) = d \cdot \frac{dz - Pdx}{da}$$

die gewünschte modulare Gleichung sein. Es ist im Folgenden immer zu beachten, dass anstelle von $\frac{dX}{dx} f(X + A)$ das Aggregat aus beliebig vielen Formeln dieser Art

$$\frac{dX}{dx} f(X + A) + \frac{dY}{dx} f(Y + B) + \text{etc.}$$

genommen werden kann. Aber anstelle von $\frac{dA}{da} f(X + A)$ wird dann

$$\frac{dA}{da} f(X + A) + \frac{dB}{da} f(Y + B) + \text{etc.}$$

gesetzt werden müssen. Nachdem dies also angemerkt worden ist, werden wir im Folgenden nur eine einzige Formel $\frac{dX}{dx} f(X + A)$ und die ihr zukommende $\frac{dA}{da} f(X + A)$ gebrauchen.

**§23** Es hänge $N$ zugleich auch von $Q$ ab und es sei

$$N = R + DQ,$$

wo $D$ eine Funktion von $a$ sei, und $R$ eine aus den folgenden Bedingungen zu bestimmende Funktion von $a$ und $x$. Es wird also

$$dQ - DQda = Mdx + Rda$$

sein, es sei

$$Dda = \frac{dH}{H}$$

und man teile auf beiden Seiten durch $H$, es wird

$$\frac{dQ}{H} - \frac{QdH}{H^2} = \frac{Mdx + Rda}{H}$$

hervorgehen. In dieser Gleichung, weil jene Seite integrierbar ist, ist auch dieses Differential $\frac{Mdx+Rda}{H}$ dazu zu machen. Es wird also durch die vorgehende Methode

$$M = \frac{HdX}{dx} f(X + A) \quad \text{und} \quad R = \frac{HdA}{da} f(X + A)$$

werden. Wenn also in einem gewissen vorgelegten Beispiel aus $P$ ein $M$ von solchem Wert gefunden wird, wird

$$N = \frac{HdA}{da} f(X + A) + \frac{dH}{Hda^2}(dz - Pdx)$$

sein, nachdem $\frac{dH}{Hda}$ anstelle von $D$ und $\frac{dz-Pdx}{da}$ anstelle von $Q$ gesetzt worden ist. Und daher wird die modulare Gleichung unmittelbar evident sein.

**§24** Wenn $N$ nicht von $Q$, sondern von $z$ abhängt, sodass

$$N = R + Cz$$

ist, während $C$ irgendeine Funktion von $a$ bezeichnet, wird

$$dQ - Czda = Mdx + Rda$$

sein. Aber weil

$$dz - Qda = Pdx$$

ist, addiere man ein Vielfaches von dieser

$$Fdz - QFda = PFdx,$$

während $F$ irgendeine Funktion von $a$ ist, wonach die Gleichung

$$dQ - QFda + Fdz - Czda = (M + PF)dx + Rda$$

entspringen wird. Man setze

$$Fda = \frac{dB}{B} \quad \text{und} \quad \frac{Cda}{F} = \frac{dG}{G},$$

sodass

$$F = \frac{dB}{Bda} \quad \text{und} \quad C = \frac{dBdG}{BGda^2}$$

ist. Es ist deshalb klar, dass $dQ - QFda$ integrierbar gemacht wird, wenn es durch $B$ geteilt oder mit $\frac{1}{B}$ multipliziert wird, $Fdz - Czda$ wird aber intergierbar, wenn es mit $\frac{1}{FG}$ multipliziert wird. Daher, damit derselbe Faktor die Summe dieser Differentiale integrierbar macht, wird $FG = B$ oder $\frac{GdB}{Bda} = B$ sein müssen, woher $G = \frac{B^2da}{dB}$ werden wird. Dieser Sache wegen ist auch die andere Seite durch $B$ geteilt integrierbar zu machen, nämlich

$$\frac{(M + PF)dx + Rda}{B}.$$

Daher setze ich

$$R = \frac{BdA}{da} f(X + A)$$

und

$$M + PF = \frac{BdX}{dx} f(X + A) = M + \frac{PdB}{Bda}.$$

Es muss also im vorgelegten Beispiel untersucht werden, ob anstelle von $A$, $B$ und $X$ solche Funktionen gefunden werden können, welche die Formel

$$\frac{BdX}{dx} f(X + A)$$

dieser

$$M + \frac{PdB}{Bda}$$

gleich macht. Und nach Finden von diesen wird

$$N = \frac{BdA}{da} f(X + A) + \frac{zdBdG}{BGda^2}$$

sein, während $G = \frac{B^2da}{dB}$ ist, welcher Wert in der Gleichung

$$Mdx + Nda = d \cdot \frac{dz - Pdx}{da}$$

eingesetzt die modulare Gleichung gegeben.

**§25** Es sei nun sehr allgemein

$$N = R + DQ + Cz,$$

während $R$, $D$ und $C$ dieselben Werte beibehalten wie zuvor. Es wird also

$$dQ - Dqda - Czda = Mdx + Rda$$

sein; man addiere sie zu dieser Gleichung

$$Fdz - FQda = PFdx,$$

damit man

$$dQ - DQda - FQda + Fdz - Czda = (M + PF)dx + Rda$$

hat. Nachdem aber wie zuvor

$$Dda = \frac{dH}{H}, \quad Fda = \frac{dB}{B} \quad \text{und} \quad \frac{Cda}{F} = \frac{dG}{G}$$

gesetzt worden ist, wird $dQ - DQda - FQda$ integrierbar, wenn mit $\frac{1}{HB}$ multipliziert wird, und $Fdz - Czda$ wird mit $\frac{1}{FG}$ multipliziert integrierbar. Daher wird

$$HB = FG = \frac{GdB}{Bda} \quad \text{und} \quad G = \frac{B^2 Hda}{dB}$$

sein müssen. Und

$$\frac{(M + PF)dx + Rda}{HB}$$

ist integrierbar zu machen, also wird für $HB = E$ gesetzt

$$R = \frac{EdA}{da} f(X + A) \quad \text{und} \quad M + PF = \frac{EdX}{dx} f(X + A)$$

werden. Deshalb werden im vorgelegten Fall $A$, $X$, $E$ und $F$, wenn es geschehen kann, so bestimmt werden müssen, dass $\frac{EdX}{dx}f(X+A)$ gleich $M+PF$ wird. Und nachdem dies gefunden worden ist, wird

$$N = \frac{EdA}{da}f(X+A) + \frac{dH}{Hda^2}(dz - Pdx) + \frac{FzdG}{Gda}$$

sein, woher man die modulare Gleichung findet.

**§26** Aber wenn man die modulare Gleichung nicht einmal als Differentialgleichung vom zweiten Grad erhalten kann, wird zu Differentialen dritten Grades voranzuschreiten sein. Es wird also

$$N = \frac{d\left(\frac{dz-Pdx}{da}\right) - Mdx}{da}$$

werden und daher wird nach Setzen von $dN = sdx + tda$

$$sdx + tda = d\left(\frac{d\left(\frac{dz-Pdx}{da}\right) - Mdx}{da}\right)$$

sein. Aber $s$ ist aus $M$ gegeben, weil $sda$ das Differential von $M$ ist, welches hervorgeht, wenn $x$ als Konstante festgelegt wird. Deswegen wird nur $t$ ausfindig gemacht werden müssen. Es sei

$$t = R + EN + DQ + Cz$$

und daher

$$dN - ENda - DQda - Czda = sdx + Rda.$$

Weil aber

$$dQ - Nda = Mdx \quad \text{und} \quad dz - Qda = Pdx$$

ist, addiere man Vielfache von dieser zu jener Gleichung, dass diese Gleichung hervorgeht

$$dN - ENda - FNda + FdQ - DQda - GQda + Gdz - Czda =$$
$$(s + MF + PG)dx + Rda.$$

Es sei

$$Eda + Fda = \frac{df}{f}, \quad \frac{Dda + Gda}{F} = \frac{dg}{g} \quad \text{und} \quad \frac{Cda}{G} = \frac{dh}{h}$$

und es werde

$$f = Fg = Gh.$$

Danach wird die linke Seite der gefundenen Gleichung geteilt durch $f$ integrierbar; deswegen ist auch

$$\frac{(s + MF + PG)dx + Rda}{f}$$

integrierbar zu machen. Es ist also

$$R = \frac{fdA}{da} f(X + A)$$

und

$$s + MF + PG = \frac{fdX}{dx} f(X + A)$$

zu setzen. In der vorgelegten Gleichung, weil $s$ und $M$ aus $P$ gegeben sind, müssen $F$, $G$ und $f$ und $X$ aus dieser Gleichung bestimmt werden. Danach nehme man $g = \frac{f}{F}$ und $h = \frac{f}{G}$ und

$$C = \frac{Gdh}{hda} \quad \text{und} \quad D = \frac{fdg}{gda} - G \quad \text{und} \quad E = \frac{df}{fda} - F.$$

Und aus diesen wird die Gleichung

$$t = R + EN + DQ + Cz$$

bekannt sein, aus welcher die modulare Gleichung leicht konstruiert wird. In gleicher Weise sieht man aus all dem ein, wie für die höheren Grade von Differentialen diese Operation ausgeführt werden muss, um zu modularen Gleichungen zu gelangen.

**§27** Wir wollen das zusammenfassen, was wir bisher angegeben haben, zum einen damit jedwede vorgelegte Gleichung leichter reduziert werden kann, zum anderen damit der Übergang zu Differentialen jedweden Grades leichter erkannt. Nachdem also die Gleichung $dz = Pdx$ vorgelegt worden ist, lege man $x$ als Konstante und nur $a$ als Variable fest und es sei

$$dP = Mda, \quad dM = pda, \quad dp = rda \quad \text{etc.}$$

Es sei weiter

$$Q = \frac{dz - Pdx}{da}, \quad N = \frac{dQ - Mdx}{da},$$
$$q = \frac{dN - pdx}{da} \quad \text{und} \quad s = \frac{dq - rdx}{da} \quad \text{etc.},$$

wo $dQ$, $dN$ und $dq$ etc. die Differentiale von $Q$, $N$ und $q$ sind, welche aus den Werten

$$\frac{dz - Pdx}{da}, \quad \frac{dQ - Mdx}{da} \quad \text{und} \quad \frac{dq - rdx}{da}$$

gefunden, wobei $a$, $x$ und $z$ als Variablen festgelegt worden sind. Dieser Sache wegen werden $M$, $p$, $r$ etc. aus $P$ sein, aus diesen wird man hingegen $Q$, $N$, $q$ etc. haben. Es seien weiterhin $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ etc. Funktionen von $a$ und Konstanten, und $X$, $Y$ etc. Funktionen von $x$, welche $a$ nicht beinhalten.

**§28** Nachdem diese Dinge vorausgeschickt worden sind, wenn $P$ eine solche Funktion von $x$ und $a$ war, dass $BP$ [§ 18] in dieser Form erfasst wird

$$\frac{dX}{dx} f(X + A)$$

oder in einem Aggregat von mehreren Formeln von dieser Art, wird die modulare Gleichung immer als Differentialgleichung ersten Grades gegeben sein. Denn es wird

$$PdAdx = z\frac{dBdX}{B} + QdadX$$

oder

$$BPdAdx = zdBdX + BQdadX$$

sein. Diese Gleichung ist wegen des gegebenen $Q$ die der vorgelegenen Gleichung entsprechende modulare Gleichung.

**§29** Wenn weiter $P$ eine solche Funktion von $a$ und $x$ ist, dass

$$BP + CM$$

[§ 24]

$$\frac{dX}{dx} f(X + A)$$

gleich werden kann oder eben einem Aggregat von beliebig vielen Formen dieser Art, wird die modulare Gleichung zu einer Differentialgleichung zweiten Grades ansteigen. Es wird nämlich

$$BPdAdx + CMdAdx = zdBdX + BQdadX + QdCdX + CNdadX$$

sein. Dies ist die gesuchte modulare Gleichung, und sie beinhaltet Differentiale zweiten Grades, weil der Buchstabe $N$ in sie eingeht, welcher durch $dQ$ und $ddz$, $ddx$ und $dda$ bestimmt wird.

**§30** Aber wenn

$$BP + CM + Dp$$

dieser Formel

$$\frac{dX}{dx} f(X + A)$$

oder einem Aggregat beliebig vieler Formeln dieser Art gleich war, wird die modulare Gleichung eine Differentialgleichung dritten Grades sein, denn es wird diese Gleichung hervorgehen

$$\begin{aligned} BPdAdx + CMdAdx + DpdAdx = zdBdX + BQdadX + QdCdX \\ + CNdadX + NdDdX + DqdadX. \end{aligned}$$

Wie sich aus dem zuvor Erläuterten erschließen lässt, wenn lediglich die allein von $a$ abhängigen Größen an diese Formeln angepasst werden.

**§31** In gleicher Weise wird der Übergang zu höheren Differentialen leicht vollzogen. Denn wenn für

$$BP + CM + Dp + Er$$

dieser Formel

$$\frac{dX}{dx} f(X + A)$$

oder dem Aggregat mehrerer solcher Formeln gleich wird, wird diese modulare Gleichung entspringen

$$BPdAdx + CMdAdx + DpdAdx + ErdAdx = zdBdX + BQdadX$$

$$+QdCdX + CNdadX + NdDdX + DqdadX + qdEdX + EsdaDx,$$

welche eine Differentialgleichung vierten Grades sein wird. Und auf diese Weise werden diese Operationen aus der Betrachtung des Erwähnten leicht beliebig weit fortgesetzt.

**§32** Nachdem aber all diese Dinge betrachtet worden sind, wird dennoch die größte Schwierigkeit oftmals im Erkennen der Funktion $P$ gelegen sein, ob sie in den erwähnten Gattungen enthalten ist und in welcher Art. Auch wenn die allgemeinen Werte von $P$, welche aus den angenommenen Formeln erhalten werden, scheint nichts an Schwierigkeit an sich zu haben, dennoch wird in speziellen vorgelegten Beispielen die Anwendung oftmals sehr schwierig sein. Der Grund hierfür ist keineswegs der angegebenen Methode zuzuteilen, sondern der unvollständigen Kenntnis der Funktionen, welche man bis jetzt hat. Deswegen wäre es nicht nur bei dieser Aufgabe, sondern auch in vielen anderen Fällen überaus nützlich, wenn die Lehre von Funktionen weiter ausgebaut werden würde.

**§33** Sofern es mir freilich möglich war über diese Sache nachzudenken, habe ich ein außerordentliches Hilfsmittel gefunden, wenn $P$ sofort auf eine Form von dieser Art $\frac{dX}{dx} f(X + A)$ oder ein Aggregat von Formeln dieser Art zurückgeführt wird, was auf die folgende Weise am leichtesten geleistet wird. Die erste vorgelegte Gleichung bestehe nicht zwischen $z$ und $x$, sondern zwischen $z$ und $y$, sodass die auf die modulare zu reduzierende Gleichung

$dz = Tdy$ ist, während $T$ eine Funktion von $y$ und des Modulus $a$ wird. Dann nehme man für $x$ eine solche Funktion von $a$ und $y$, welche $T$ in eine Funktion von $a$ und $x$, enthalten in der Formel $f(X + A)$ oder mehreren dieser ähnlichen oder deren Vielfachen, verwandelt, in welchen $X$ eine Funktion nur von $x$, und $A$ eine von $a$ ist. Auf diese Weise gehe also die Gleichung $dz = Sdxf(X + A)$ hervor, wo $S$ eine möglichst einfache Größe sei. Also wird $P\ Sf(X + A)$ sein und daher mit $M$, $p$ etc. zusammengebracht leichter mit den allgemeinen Formeln verglichen. Nachdem aber auf diese Weise die modulare Gleichung gefunden worden ist, setze man den angenommenen Wert von $x$ in $a$ und $y$ überall anstelle von $x$ ein, anstelle von $dx$ aber das Differential dieses Wertes, wobei $a$ und $y$ als Variablen festgelegt worden sind. Danach wird man die modulare Gleichung zwischen $a$, $y$ und $z$ haben, welche man suchte.

**§34** Zur umfassenderen Erkenntnis der bisher angegebenen Methode werden die Beispiele und Probleme am meisten beitragen, deren Lösung diese Methode erfordert. Aber weil die Qualität dieser Probleme eine eigene Behandlung verlangt, werde ich das auf einen anderen Zeitpunkt verschieben, um hier nicht allzu umfangreich zu werden.